Série 4 - Calcul variationnel

1 Invariance par évolution temporelle

Objectif : déterminer la grandeur conservée.

Théorie : mécanique analytique.

Difficulté : ★☆☆☆ obligatoire.

L'action $S\left[f\right]$ d'un système physique, qui est une fonctionnelle de la fonction $f\left(t\right)$, est définie durant l'intervalle de temps $t \in [t_i, t_f]$ comme l'intégrale temporelle du lagrangien $L\Big(f\left(t\right), \dot{f}\left(t\right), t\Big)$,

$$S\left[f\right] = \int_{t_i}^{t_f} L\Big(f\left(t\right), \dot{f}\left(t\right), t\Big)\, dt\,.$$

(a) Montrer que les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0\,,$$

peuvent être écrites de manière équivalente comme,

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\,\dot{f}\right) = 0\,.$$

(b) En déduire que si le système physique est invariant par évolution temporelle, l'énergie E définie comme,

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\,\dot{f} - L\,,$$

est une constante du mouvement.

2 Principe de Fermat

◉ **Objectif** : appliquer le principe de moindre action en optique géométrique.

📖 **Théorie** : mécanique analytique.

✍ **Difficulté** : ★★★★ obligatoire.

En optique géométrique, le principe de moindre action de Fermat détermine le chemin suivi par un rayon lumineux qui se propage dans un milieu caractérisé par un indice de réfraction $n(x,y)$ dépendant de la position. Le rayon lumineux de nombre d'onde k va suivre le chemin $y(x)$, de la position initiale (x_1, y_1) à la position finale (x_2, y_2), le long duquel l'action,

$$S = \hbar\, k \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} n(x,y)\, ds(x,y) \ ,$$

est minimale compte tenu de l'abscisse curviligne infinitésimal $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ tangent à la trajectoire. Pour une position initiale $(x_1, y_1) = (-1, 1)$ et une position finale $(x_2, y_2) = (1, 1)$, déterminer le rayon lumineux pour un indice de réfraction,

(a) $n(x,y) = e^{\,ay}$,

(b) $n(x,y) = a\,(y - b)$ où $y > b$, $a > 0$ et $b < 1$.

3 Particule chargée dans un champ électromagnétique

◉ **Objectif** : appliquer les équations d'Euler Lagrange pour déterminer la dynamique de la particule.

📖 **Théorie** : électromagnétisme.

✍ **Difficulté** : ★★★★ obligatoire.

Le lagrangien pour une particule de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique décrit par un potentiel scalaire électrique $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ et un potentiel vecteur magnétique $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ s'écrit,

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\boldsymbol{x}}^2 - q\,\phi(\boldsymbol{x}, t) + q\,\mathbf{A}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,,$$

où $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}(t)$ et $\dot{\boldsymbol{x}} \equiv \dot{\boldsymbol{x}}(t)$.

(a) Montrer que l'équation vectorielle du mouvement de la particule chargée soumise à la force de Lorentz s'écrit,

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{\boldsymbol{x}} &= q\left(-\,\partial_t\,\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x},t\right)-\,\boldsymbol{\nabla}\,\phi\left(\boldsymbol{x},t\right)\right)+q\,\dot{\boldsymbol{x}}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x},t\right)\right)\\
&= q\left(\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{x},t\right)+\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x},t\right)\right).
\end{aligned}
$$

4 Calcul variationnel et équations de Maxwell

⦿ **Objectif** : établir les équations d'Euler Lagrange pour des champs et les utiliser afin d'en déduire les équations de Maxwell.

📖 **Théorie** : électromagnétisme.

✍ **Difficulté** : ★★★★ obligatoire.

L'action d'un champ électromagnétique en présence d'une densité de charge électrique $\rho\left(\mathbf{x},t\right)$ et d'une densité de courant électrique $\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{x},t\right)$ dans le vide s'écrit,

$$
S\left[\phi,\mathbf{A}\right]=\int dt\iiint d^3x\left(\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}^2\left(\phi,\mathbf{A}\right)-\frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{B}^2\left(\mathbf{A}\right)\right)-\,\rho\,\phi+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\right).
$$

où ϕ est potentiel scalaire et $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur. L'action est l'intégrale sur l'espace et le temps de la densité lagrangienne,

$$
\mathcal{L}\left(\phi,\mathbf{A}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}^2\left(\phi,\mathbf{A}\right)-\frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{B}^2\left(\mathbf{A}\right)\right)-\,\rho\,\phi+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,,
$$

où les champs électrique et magnétique sont exprimés en termes des potentiels comme,

$$
\boldsymbol{E}\left(\phi,\mathbf{A}\right)=-\boldsymbol{\nabla}\,\phi-\,\partial_t\,\boldsymbol{A}\qquad\text{et}\qquad\boldsymbol{B}\left(\mathbf{A}\right)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\,.
$$

(a) Par un calcul variationnel basé sur l'action écrite de manière générique comme une fonctionnelle de champs scalaires ϕ_μ, de leurs dérivées temporelles $\dot{\phi}_\mu$ et de leurs dérivées spatiales $\partial_i\,\phi_\mu$,

$$
S\left[\phi_\mu\right]=\int dt\iiint d^3x\;\mathcal{L}\left(\phi_\mu,\dot{\phi}_\mu,\partial_i\,\phi_\mu\right).
$$

où $\mu=0,1,2,3$ et $i=1,2,3$, établir les équations d'Euler-Lagrange pour des champs scalaires,

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_\mu}\right)+\sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\,\phi_\mu\right)}\right)-\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu}=0\,,
$$

compte tenu des conditions au bord de Dirichlet,

$$\lim_{|t|\to\infty} \delta\phi_\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{|x_i|\to\infty} \delta\phi_\mu = 0\,.$$

(b) En déduire les équations de Maxwell.

5 Calcul variationnel et fonctions d'onde

Objectif : établir l'équation de Schrödinger par calcul variationnel et déterminer le niveau d'énergie fondamental de l'oscillateur harmonique quantique.

Théorie : physique quantique I.

Difficulté : ☆☆☆★ facultatif.

On considère une particule de masse m soumise à un potentiel indépendant du temps $V(x)$ dont l'état quantique est décrit par la fonction d'onde $\psi(x) \in \mathbb{C}$ sous contrainte que son énergie E est constante. Comme la fonction d'onde complexe a deux degrés de liberté réels, on choisit comme champs linéairement indépendants ψ et ψ^*. L'action de la particule est,

$$S[\psi, \psi^*] = \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m}\, \partial_x\, \psi^* \partial_x\, \psi + V(x)\, \psi^*\psi - E\, \psi^*\psi \right).$$

La densité lagrangienne indépendante du temps est,

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_x\, \psi, \partial_x\, \psi^*) = \frac{\hbar^2}{2m}\, \partial_x\, \psi^* \partial_x\, \psi + V(x)\, \psi^*\psi - E\, \psi^*\psi\,.$$

(a) A l'aide des résultats de l'exercice précédent, déterminer les équations d'Euler-Lagrange qui décrivent le mouvement de la particule.

(b) Le dernier terme de l'action $S[\psi, \psi^*]$ peut être interprété à une constante près comme le produit du multiplicateur de Lagrange E et de la condition de normalisation,

$$\int dx\, \psi^*\psi - 1 = 0\,.$$

Montrer que la variation de la fonctionnelle énergie définie comme,

$$E[\psi, \psi^*] = \frac{\displaystyle\int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m}\, \partial_x\, \psi^* \partial_x\, \psi + V(x)\, \psi^*\psi \right)}{\displaystyle\int dx\, \psi^*\psi}\,,$$

donne les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

(c) Pour une particule décrite par une fonction d'onde $\psi\left(x\right) = e^{-\,ax^2}$ soumise à un potentiel harmonique,

$$V\left(x\right) = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 x^2\,.$$

déterminer la valeur a_0 de la constante $a > 0$ qui minimise la fonctionnelle énergie $E\left[\psi, \psi^*\right]$ et montrer que l'énergie correspondante E_0 est celle du niveau fondamental de l'oscillateur harmonique quantique,

$$E_0 = \frac{1}{2}\,\hbar\,\omega\,.$$

Pour ce faire, utiliser les résultats des intégrales suivantes,

$$\int_{-\,\infty}^{\infty} e^{-\,a\,x^2}\,dx = N\left(a\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

$$\int_{-\,\infty}^{\infty} x^2\,e^{-\,a\,x^2}\,dx = -\,\frac{dN\left(a\right)}{da} = \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\,.$$